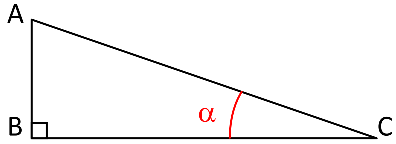
Fiche méthode

LA TRIGONOMÉTRIE : UNE FORCE MATHÉMATIQUE

I- Rappels mathématiques

1°) Formules de trigonométrie

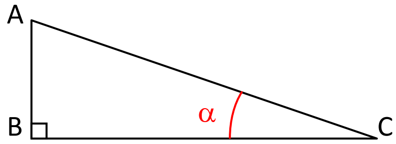
Considérons un triangle rectangle en B :



Nous avons : $\boxed{\sin\alpha = \frac{AB}{AC}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{BC}{AC}}$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ soit $\boxed{\tan\alpha = \frac{AB}{BC}}$

2°) Le théorème de Pythagore

Considérons un triangle rectangle en B :



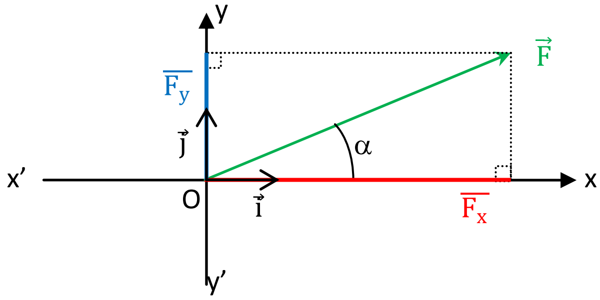
D'après le théorème de Pythagore : $\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$

II- Application à la physique

1°) Projection d'un vecteur force

a) Cas d'un vecteur ayant des coordonnées positives

Considérons, dans un repère $(O\,;\vec{i},\ \vec{j})$, une force $\vec{F}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale :



- La coordonnée $\overline{F_x}$ correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des abscisses :

  $\cos\alpha = \frac{\overline{F_x}}{\|\vec{F}\|}$ soit $\overline{F_x} = \|\vec{F}\| \times \cos\alpha$ soit $\boxed{\overline{F_x} = F \times \cos\alpha}$

- La coordonnée $\overline{F_y}$ correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des ordonnées :

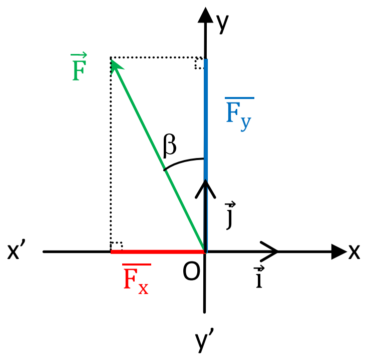
  $\sin\alpha = \frac{\overline{F_y}}{\|\vec{F}\|}$ soit $\overline{F_y} = \|\vec{F}\| \times \sin\alpha$ soit $\boxed{\overline{F_y} = F \times \sin\alpha}$

Rq. 1 : Les termes F, sinα et cosα sont positifs : les coordonnées $\overline{F_x}$ et $\overline{F_y}$ sont positives.

Rq. 2 : La notation des coordonnées en mesure algébrique est facultative, mais permet ici d'insister sur le fait que ces coordonnées peuvent être à priori positives comme négatives.

b) Cas d'un vecteur ayant une coordonnée négative

Considérons, dans un repère $(O\ ;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, une force $\vec{F}$ inclinée d'un angle β par rapport à la verticale :



- La coordonnée $\overline{F_x}$ correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des abscisses :

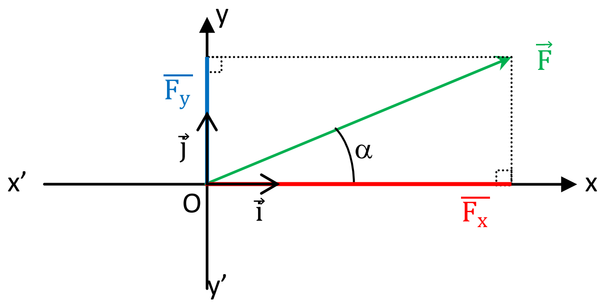
  $\sin\beta = -\dfrac{\overline{F_x}}{\|\vec{F}\|}$ soit $\overline{F_x} = -\|\vec{F}\| \times \sin\beta$ soit $\boxed{\overline{F_x} = -F \times \sin\beta}$

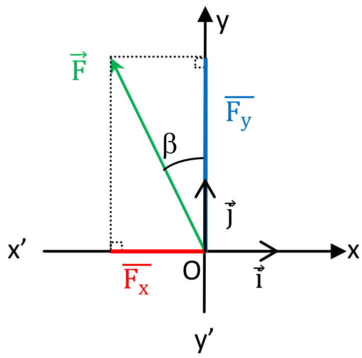
- La coordonnée $\overline{F_y}$ correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des ordonnées :

  $\cos\beta = \dfrac{\overline{F_y}}{\|\vec{F}\|}$ soit $\overline{F_y} = \|\vec{F}\| \times \cos\beta$ soit $\boxed{\overline{F_y} = F \times \cos\beta}$

Rq. : Les termes F et $\sin\beta$ sont positifs : la coordonnée $\overline{F_x}$ est négative.
Les termes F et $\cos\beta$ sont positifs : la coordonnée $\overline{F_y}$ est positive.

2°) Norme d'un vecteur force





Qu'un vecteur possède des coordonnées positives ou une ou deux coordonnées négatives, sa norme peut être déterminée grâce au théorème de Pythagore : $\|\vec{F}\|^2 = \overline{F_x}^2 + \overline{F_y}^2$ soit $\boxed{F = \sqrt{\overline{F_x}^2 + \overline{F_y}^2}}$

III- Exemples : Que la force soit avec toi !!

1°) Star Wars® : épisode 1

a) Énoncé

Après avoir héroïquement combattu son adversaire, Anakin entend une petite voix sortant du haut-parleur situé à quelques mètres devant lui, suspendu à 2 câbles en alliage indestructible de georgeate de lucasium.

Vif comme l'éclair, il consulte son hyperrapporteur à télémétrie laser, qui lui indique que chaque câble fait un angle de 60° avec la verticale, ainsi que son mégapèsomètre de roberval subatomique, qui estime la masse du haut-parleur à 20 kg.

Et c'est en prenant son courage dans la main gauche (la droite étant occupée à ranger son laser !) qu'il décide sans hésiter, au moyen de son organiseur nucléonique, de :

① : représenter le poids $\vec{P}$ du haut-parleur à l'échelle 1,0 cm pour 100 N.

② : indiquer la relation entre le poids $\vec{P}$ et la résultante $\vec{F}$ des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées par chacun des câbles (en georgeate de lucasium, ne l'oublions pas !) sur le haut-parleur.

③ : représenter la résultante $\vec{F}$.

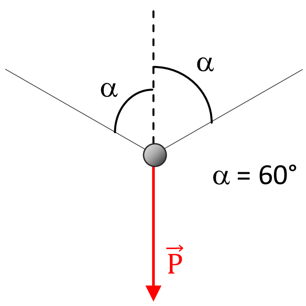
④ : représenter soigneusement les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées par chacun des câbles.

⑤ : en déduire, à partir du schéma et en tenant compte de l'échelle, les valeurs des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

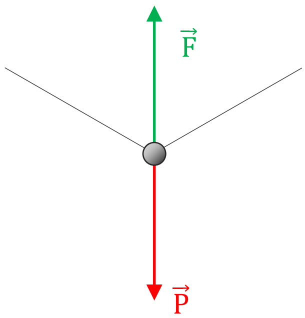
Alors fait comme lui !!

b) Corrigé

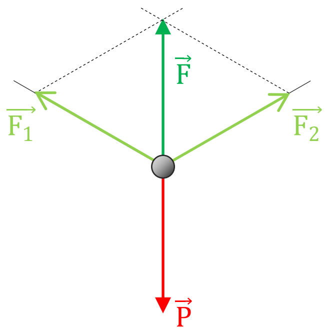
Voici les différents dessins obtenus au cours des différentes phases de l'exercice :



①



③



④

① : Le poids P du haut-parleur est défini par : P = m.g

A.N. : P = 20 × 9,8 = 196 N

À l'échelle 1,0 cm pour 100 N, le vecteur poids $\vec{P}$ mesurera 1,96 cm.

② : D'après le principe d'inertie, le système « haut-parleur » étant immobile dans le référentiel tatouïnecentrique subit des forces se compensant : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

③ : La résultante $\vec{F}$ et le poids $\vec{P}$ ont même direction, même valeur, mais sont de sens contraire.

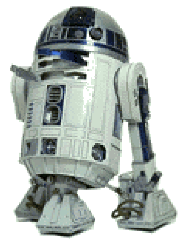
④ : (Cf. les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées par chacun des câbles sur le schéma)

⑤ : Sur le schéma la longueur des vecteurs force $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est de 1,96 cm.

À l'échelle 1,0 cm pour 100 N, les vecteurs force $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ont une norme égale à 196 N

2°) Star Wars® : épisode 2

a) Énoncé



Doté de puces neuroniques ultra rapides en plus de son hyperrapporteur à télémétrie laser et mégapèsomètre de roberval subatomique, R2-D2 décide *en même temps qu'Anakin* de déterminer les valeurs des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ mais par une méthode analytique et non géométrique. Telle une machine bien programmée, il décide alors de :

① : schématiser le haut-parleur et les câbles (… en georgeate de lucasium)

② : représenter le poids $\vec{P}$ du haut-parleur et les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ exercées par chacun des câbles.

③ : donner l'expression littérale de la valeur des composantes horizontales des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ en fonction de l'angle α, puis de préciser en justifiant si ces deux composantes ont la même valeur.

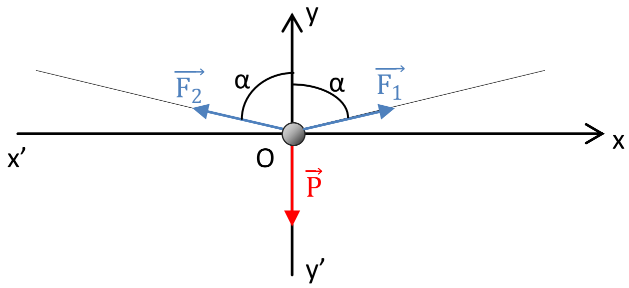
④ : donner l'expression littérale de la valeur des composantes verticales des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\vec{P}$ en fonction de l'angle α, puis de préciser, en justifiant, si les deux composantes verticales des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ ont la même valeur.

⑤ : préciser une relation entre le poids $\vec{P}$ et les deux composantes verticales des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, puis de calculer la valeur de ces composantes verticales.

Tu dois déjà avoir fini si toi aussi, tu as fait comme lui, « en même temps qu'Anakin » !!

b) Corrigé

① et ② : α = 60°



③ : Par projection des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sur l'axe x'Ox, nous obtenons :

$$\overline{F_{1_x}} = F_1 \times \sin\alpha \quad \text{et} \quad \overline{F_{2_x}} = -F_2 \times \sin\alpha$$

Même si les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ ont la même valeur, comme elles sont de sens opposé, les deux composantes horizontales $\overline{F_{1_x}}$ et $\overline{F_{2_x}}$ n'ont pas la même valeur.

④ : Par projection des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sur l'axe y'Oy, nous obtenons :

$$\overline{F_{1_y}} = F_1 \times \cos\alpha \quad ; \quad \overline{F_{2_y}} = F_2 \times \cos\alpha \quad ; \quad \overline{P_y} = -P$$

Les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ ont la même valeur et sont de même sens, les deux composantes horizontales $\overline{F_{1_y}}$ et $\overline{F_{2_y}}$ ont la même valeur.

⑤ :
- Puisque le système « haut-parleur » est à l'équilibre, les forces qu'il subit se compensent : la somme des composantes verticales (comme horizontales) est donc nulle : $\overline{F_{1_y}} + \overline{F_{2_y}} + \overline{P_y} = 0$
- Comme $\overline{P_y} = -P$ alors $\overline{F_{1_y}} + \overline{F_{2_y}} = P$
- Or nous avons montré précédemment que $\overline{F_{1_y}} = F_1 \times \cos\alpha$ et $\overline{F_{2_y}} = F_2 \times \cos\alpha$

  Donc $F_1 \times \cos\alpha + F_2 \times \cos\alpha = P$ soit $(F_1 + F_2) \times \cos\alpha = P$
- Puisque les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ ont la même valeur, alors $2.F_2 \times \cos\alpha = P$

  soit $F_2 = F_1 = \frac{P}{2.\cos\alpha}$ soit $\boxed{F_2 = F_1 = \frac{m.g}{2.\cos\alpha}}$

  A.N. : $F_2 = F_1 = \frac{20 \times 9{,}8}{2.\cos 60°} = 196$ N

Mr DESCOUT Michel
Lycée Léonard de Vinci
SAINT-WITZ (95)